

Determinanti.

$$1) \forall A \in K^{n \times n} : \det(A) = \det(A^T).$$

$$2) \forall A, B \in K^{n \times n} \quad \det(A B) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) \\ = \det(BA)$$

$$\underline{\underline{\text{N.B.}}} \quad AB \neq BA$$

$$AX = B \quad \text{can } \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

BA^{-1} pokrepla novu osnovu
normalno definitno!

~~B/A ??~~ No

$$3) A \in GL(n, K) \Leftrightarrow A \in K^{n \times n} \text{ \& } \det(A) \neq 0.$$

ELIMINATIONE GAUSSIANA

1) Scambio colonna i con colonna j G_{ij}

$$j \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $i \quad j$

2) Prodotto di una colonna i per scalare α

$$\pi_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow$
 i

3) Somme des colonnes i et de la colonne j

$$v_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow$
j

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{bmatrix}$$

Rango:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ una matrice. Si dice rango di A $\text{rk}(A) = \rho(A) = \text{rango}(A)$ l'ordine di l' più grande minore non nulla di A con $\det(M) \neq 0$.

Teorema: Il rango di una matrice A corrisponde alla dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A che è la stessa della dimensione dello sp. vettoriale generato dalle colonne di A e coincide anche col rango della qualsiasi applicazione lineare $f: K^n \rightarrow K^m$ che ammetta A come matrice rappresentativa.

(Kronecker).

$$\begin{aligned} \text{rk}(A) &= \dim \mathcal{L}_R(A) = \dim \mathcal{L}_C(A) = \\ &= \text{rk}(f_A) \\ \text{ove } f_A: X &\rightarrow AX \end{aligned}$$

oss 1) per definizione di $\text{rk}(A)$ si ha $\text{rk}(A) = \text{rk}(A^T)$

$\Rightarrow$ se vale $\text{rk}(A) = \dim \mathcal{L}_R(A) \Rightarrow$ vale anche

$$\text{rk}(A) = \dim \mathcal{L}_C(A)$$

$\Delta \quad \mathcal{L}_R(A) \neq \mathcal{L}_C(A) \quad \text{lo spazio generato dalle}$

righe di A è diverso dallo sp. generato
dalle colonne!

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_R(A) = \mathcal{L}((1 \ 2 \ 3), (0 \ 1 \ 2)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}_C(A) = \mathcal{L}((1 \ 0)^T, (2 \ 1)^T, (3 \ 2)^T) = \mathbb{R}^2$$

2) Se vale $\text{rk}(A) = \dim \mathcal{L}_C(A) \Rightarrow$ poiché $\text{Im}(f_A)$ è
generato dalle colonne di A si ha $\dim \mathcal{L}_C(A) = \dim \text{Im } f_A$

$$\text{e quindi } \operatorname{rk}(A) = \dim \mathcal{L}_C(A) = \dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rk}(f_A).$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE $\left[\operatorname{rk}(A) = \dim \mathcal{L}_R(A) \right]$

Lemma:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow$ le righe di A sono
linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \exists$ un minore
 $M \in \mathbb{K}^{m \times m}$ contenuto in A con $\det(M) \neq 0$.

DLM: Se $n < m \Rightarrow$ le righe di A sono n vettori di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ sono legati e non esiste alcun minore
 $m \times m$ contenuto in A ✓

Se $n = m \Rightarrow$ le righe di A sono n vettori indip $\Leftrightarrow$
non hanno di $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
ed $M = A$.

Supponiamo $n > m$.

- Se le righe di A sono legate $\Rightarrow$ almeno una di esse è c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ ogni minore che contiene quella c. riga di A deve contenere anche un pezzo di quella $\Rightarrow$ ogni minore che contiene m righe di A ha una riga legata $\Rightarrow$ anche ogni minore $\mu_{m \times m}$ di A ha una riga "legata" $\Rightarrow \det(\mu) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_{m-1} R_{m-1} \end{bmatrix}$$

- Supponiamo che le righe di A siano libere.

$\Rightarrow$ Abbiamo m vettori di $\mathbb{K}^n$ che sono linearmente indipendenti. $m < n$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e completiamo a base di $\mathbb{K}^n$ l'insieme delle righe di M .

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$\mathcal{B}_0 = (R_1 \dots R_m)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \underbrace{(R_1 \dots R_m)}_{\mathcal{B}_0} \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-m}} \text{ base di } \mathbb{K}^n$$

Se ci mettiamo a matrice i vettori di $\tilde{\mathcal{B}}$, si ottiene una matrice quadrata $n \times n$ e questa matrice $\tilde{A}$ ha determinante $\neq 0$ (perché le sue righe sono una base).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow A$$

vettori di $\mathcal{B}$.

$$\det \tilde{A} = (-1)^{i_1 + i_{n-m}} \det(\tilde{A}_{n, i_{n-m}})$$

chamando na linha a linha seguinte
 se vê que $0 \neq \det \tilde{A} = \pm \det \tilde{A}'$ ou

$\tilde{A}'$ matriz obtida de A cancelando

a $n-m$ linha seguinte e $n-m$ colunas

$\Rightarrow \exists$ M menor de A tal que $M \in K^{m,m}$

e $\det(M) \neq 0$.

□

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}$$

$$\det(\tilde{A}) \neq 0$$

$$\det \tilde{A} = \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\tilde{A}) = \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Teorema: $\text{rk}(A) = \dim \mathcal{G}_R(A)$.

D14: Sia $\text{rk}(A) = i$ e $\dim \mathcal{L}_R(A) = j$

Se $j > i \Rightarrow$ esistono in A j righe lin. indep.

in particolare esistono almeno $i+1$ righe indep $\Rightarrow$ per il lemma precedente la sottomatrice di A formata da queste $i+1$ righe contiene un minore M di ordine $(i+1) \times (i+1)$ con $\det(M) \neq 0$.

Ma M è anche minore di $A \Rightarrow \forall i+1 > i$

$\Rightarrow j \leq i$

Se fosse $j < i \Rightarrow$ ogni insieme di $j+1$ righe di A è legato $\Rightarrow$ per il Lemma ogni minore di ordine $(j+1) \times (j+1)$ ha $\det = 0$ $\forall$ perché esiste un minore di ordine $i > j$ con $\det \neq 0 \Rightarrow j = i$ $\square$

* N.B.: Se ogni minore di ordine k di una matrice ha $\det = 0 \Rightarrow$ ogni minore di ordine $k' > k$ deve avere $\det = 0$.

D.M.: Teoremi di Laplace.

Calcolo DEL RANGO.

1) Guess: Ridurre la matrice in forma canonica a scalini e contare le righe non nulle.



Siano ℓ, m due indici di riga.

- 1) La prima entry $\neq 0$ in ogni riga sia 1
- 2) Gestire non nulla prima entry $\neq 0$ in ogni riga

modifica la prop. che se $i > j \Rightarrow$ tale elemento sulla riga i è strettamente più a dx dell'elemento sulla riga j .

Nella colonna 2

3) Il coefficiente principale dell'entrata non nulla di una prima

riga, di cui c'è una unica entrata $\neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e prime entrate $\neq 0$ delle righe che ne convergono sono dette pivots.

1) Una forma di questo tipo si può ottenere a partire da qualsiasi matrice mediante le operazioni di

- 1) scambio di righe
- 2) prodotti di riga per $\lambda \neq 0$
- 3) somma di 2 righe

o.) La forma ottenuta è equivalente a zero.

→ Il rango della matrice corrisponde al numero di righe non nulle.

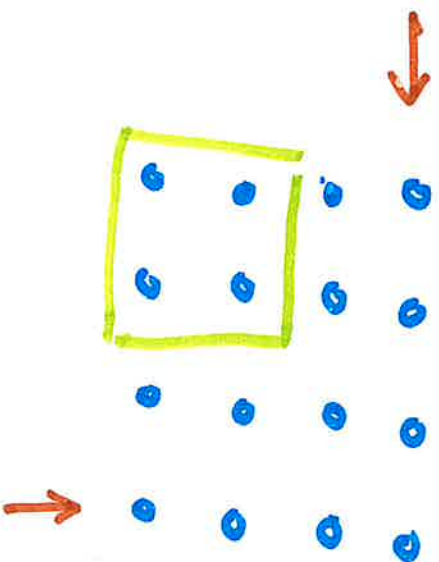
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank} = 3$$

Teorema degli orlati:

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha rango k se e solamente se $\exists$ un minore $M_{k \times k}$ di A con $\det(M) \neq 0$ ed ogni minore di A di ordine $(k+1) \times (k+1)$ contenente M ha $\det = 0$.



$4 \times 4 = 16$ minori 3×3
orlati di $2 \times 2 \Rightarrow 2 \times 2 = 4$